第 40 卷 第 2 期
2023 年 4 月

应 用 力 学 学 报
Chinese Journal of Applied Mechanics

Vol. 40 No. 2
Apr. 2023

文章编号:1000-4939(2023)02-0334-06

粗糙表面接触的层级模型

闫铎,李磊涛,梁轩铭,邢宇哲

(西安交通大学工程力学系,710049 西安)

摘 要:真实的材料加工表面的粗糙度往往跨越了多个尺度。本研究建立了一种新的粗糙表面层级接触模型。对于较大尺度部分,截断过滤短波长的粗糙度,然后运用连续介质力学的方法计算出相应的近似接触面积和局部压力的分布;对于较小尺度部分,本研究基于分形理论,利用二维 Cantor 集来描述层叠的短波长微凸峰,然后对在较大尺度得到的近似接触面积进行细化修正,计算出了最终的接触面积。为了验证所建立的模型,将得到的整体接触响应与有限元法计算结果进行了比较。结果表明,该模型能够充分预测粗糙表面的弹性接触响应,而且大大降低了多尺度粗糙表面接触力学建模的计算规模。这对进一步研究跨尺度粗糙表面之间的接触和摩擦具有重要意义。

关键词:接触;粗糙表面;多尺度;分形;功率谱密度

中图分类号:O343.3 **文献标志码:**A **DOI:**10.11776/j.issn.1000-4939.2023.02.011

A hierarchical contact model for rough surface

YAN Duo, LI Leitao, LIANG Xuanming, XING Yuzhe

(Department of Engineering Mechanics, SVL, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Real machined surfaces are always rough across a wide range of length scales. This paper develops a hierarchical contact model, in which surface power spectrum density function is employed to divide roughness into two parts. In the macroscopic part, by cutting off short-wavelength roughness, the approximate contact area and the distribution of normal force are obtained adopting the continuum mechanics solution. In the microscopic part, the superposition of asperities for short wavelength is transformed into a two dimensional Cantor set based on fractal theory, and the approximate contact area is further refined based on the local pressure and geometric parameters. The contact response of the whole surface is thus obtained by adding the modification of the microscopic part into the macroscopic part. For verification, FEM is adopted to calculate the response of the fractal rough surfaces. The results demonstrate that our model can adequately predict the contact response of the multi-scale rough surface. The current study reduces the computing scale of the mechanical model of rough surfaces and thus provides a new method modeling rough surfaces in a larger scale span. This may have significant implications for further research on contact and friction between multi-scale rough surfaces.

Key words: contact; rough surface; multi-scale; fractal; power spectral density

收稿日期:2021-03-22 **修回日期:**2021-07-21
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No.11525209)
通信作者:闫铎。E-mail:fz20110144@163.com
引用格式:闫铎,李磊涛,梁轩铭,等. 粗糙表面接触的层级模型[J]. 应用力学学报,2023,40(2):334-339.
YAN Duo, LI Leitao, LIANG Xuanming, et al. A hierarchical contact model for rough surface[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2023, 40(2):334-339.

大量的实验表明[1-4]，当 2 个材料表面发生接触时，处于真实接触状态的区域只占名义接触面积的一小部分。此外，在微米尺度和纳米尺度上都可以观察到表面粗糙不平的现象。随着观测尺度的细化，许多粗糙表面的结构表现出了显著的分形特征[5]。预测跨尺度粗糙表面的接触响应是接触和摩擦领域的一项具有挑战性的任务。

在过去的几十年里，学者们已发展了许多描述粗糙表面形貌和接触响应的理论模型。ARCHARD[6]将粗糙表面建模为半球叠加在较小尺度上的自相似结构。GREENWOOD 等[7]将粗糙表面描述为曲率相同且高度服从 Gauss 统计分布的球面。此外，NAYAK[8]将粗糙表面描述为二维随机过程，并推导出了高斯型随机粗糙表面的统计特征。基于该随机过程理论，BUSH 等[9]同时考虑了粗糙峰高度和曲率的统计特征。然而，这些多微凸模型中的参数是具有尺度依赖性的，对于不同的观测尺度不具有唯一性[10]。

基于分形理论，MAJUMDAR 等采用 W－M 函数来描述粗糙表面，并得到了整体接触响应与分形参数之间的关系[10]。YAN 等[11]进一步建立了三维粗糙表面的分形接触模型。金守峰等[12]在此基础上加入了弹塑性变形的修正并建立了修正模型。赵永武等[13]依据微凸体变形的连续性和光滑性原理提出了新的接触模型。甘立等[14]通过推导第一、第二临界弹塑性接触面积与临界弹性接触面积的关系，建立了修正的弹塑性接触模型。

功率谱常被用来分析粗糙表面的几何特征。自仿射分形粗糙表面接触模型中，采用了满足幂律关系的功率谱[15]。然而，实验测量的结果表明粗糙表面的功率谱函数与尺度的幂律关系在较大尺度下并不成立[16]。HYUN 等[15]发现，引入大波长截止将导致真实接触面积与载荷的比例系数的小幅增加。因此，假设粗糙表面在所有长度尺度下的形貌都是分形的，这可能是不合适的。

数值模拟是研究粗糙表面接触问题的有力手段[17-18]。在已有的数值计算工作中，考虑的表面粗糙度仅限于较窄的尺度跨度。在有限的计算资源下，随着粗糙度的细化，可以模拟的模型尺寸将急剧缩小。鉴于此，有人提出了解决这个问题的方案。例如，AN 等[19]开发了一种光谱插值方法来细化表面。然而，这种插值方法无法在小尺度上提供充足的信息。多尺度方法是克服这一困难的一种合理有效的途径。WANG 等[20]建立了一个多尺度接触模型来模拟光滑球体与实际加工粗糙表面之间的弹塑性接触，其中表面总位移场由全局水平的体变形和子级的球形微凸体变形组成。

在本研究中，基于粗糙表面的功率谱分析，提出了一种新的方法来解决多尺度粗糙表面的接触问题。利用这个方法，计算了各向同性粗糙表面与刚平面接触时的法向载荷与真实接触面积之间的关系。结果表明，用此方法所得结果与直接有限元数值计算的结果吻合较好，且大大提高了计算效率。这将有助于进一步研究粗糙表面在更宽的频率跨度内的接触响应。

1　模型描述

实际粗糙表面包含多尺度粗糙度。将粗糙度看作是不同波长正弦波的叠加，由粗糙表面的高度信息可以计算得到其功率谱密度（power spectral density，PSD）函数。对于典型的理想各向同性粗糙表面的 PSD 函数，当频率小于临界频率 q_r时，PSD 函数几乎保持一个恒定的值 P_0。这描述了由于加工轮廓和表面处理的影响导致粗糙表面在较大尺度上呈现出的非分形特征。当频率大于临界值 q_r时，PSD 函数将与频率呈对数线性的关系，这意味着表面在细观尺度上呈现分形特征。由于在实际粗糙表面的测量中，实验采样的尺寸是有限的，而采样间隔决定了横向的分辨率，表面粗糙的频率 q 被限制在 q_0 到 q_s 的范围内。本研究所提到的频率即指的是描述空间频率的波数。一般来说，粗糙表面的 PSD 函数可以描述为

$$C(q) = \begin{cases} P_0, & q_L < q \leqslant q_r \\ P_0\left(\dfrac{q}{q_r}\right)^{-2-2H}, & q_r < q \leqslant q_s \\ 0, & \text{else} \end{cases} \qquad (1)$$

其中，H 为粗糙表面的 Hurst 指数，可以通过拟合被测面的 PSD 函数得到。

基于上述 PSD 函数的特性，本研究提出一个层级模型来计算实际接触面积，如图 1 所示。以某一频率 q_c为界将表面粗糙度划分为大尺度和小尺度两部分。对于式（1）这样的 PSD 函数，临界频率 q_r是一个直观的选择，即令 $q_c = q_r$。首先，使用仅包含大尺度的粗糙峰的近似粗糙表面（即过滤掉频率高于 q_c的粗糙度）来估计局部接触压力的分布和近似接

触面积。然后，利用基于分形理论的二维 Cantor 集描述小尺度部分的粗糙峰，并对其在接触中的影响进行了分析，对大尺度部分得到近似接触面积进行了细化，最后给出了考虑多尺度粗糙度的真实接触面积。下面将详细描述这两部分的计算过程。

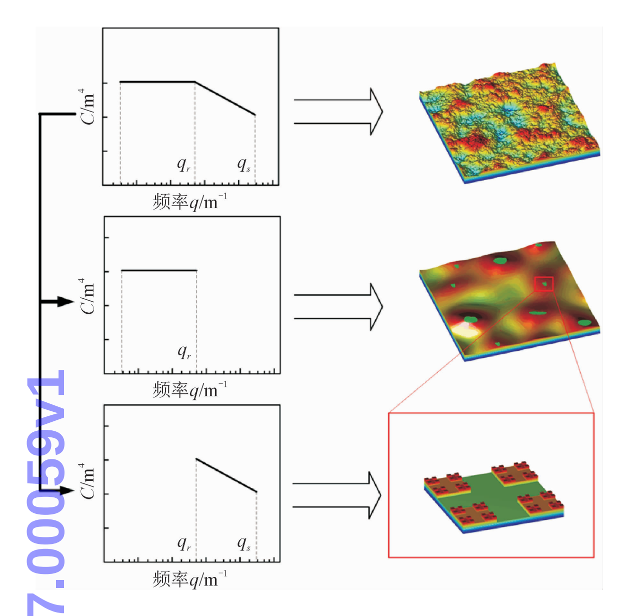


图 1　基于粗糙表面 PSD 函数的层级模型

Fig. 1　Hierarchical model based on the PSD function

1.1　大尺度部分

在这部分，包含全部粗糙度信息的原始粗糙表面将通过截去频率高于 q_r 的粗糙峰的方式进行重构。首先，通过二维傅里叶变换，可以得到原始粗糙表面的 PSD 函数和临界频率 q_r。然后，将频率高于 q_r 的各频率粗糙的振幅置零，而频率低于 q_r 的振幅与相位保持不变。最后，对截断的 PSD 函数执行傅里叶逆变换得到仅包含较大尺度粗糙峰的粗糙表面。重构的表面只包含了较窄的频率跨度的粗糙，并且细观的形貌变得光滑连续。因此，可以使用有限元的方法对重构表面进行建模，并快速计算出其与刚性平面接触响应，得到接触过程中的法向压力分布和该有限尺度下的近似接触面积。

进一步假设，在仅包含大尺度粗糙的接触过程中得到的局部法向压力分布与原始粗糙表面接触的保持一致。需要注意的是，本小节得到局部法向压力与接触区域的最小尺度是在有限元网格的尺度，离散间距就是粗糙表面网格的采样间距，即 $\sqrt{2}\pi/q_r$。通过有限元计算，可以获得每个处于接触中的离散面积单元与其上承受的法向压力。然后，每个接触单元上的真实接触面积将由下一节考虑更小尺度粗糙特征的计算得到。最后，将每个单元上的真实接触面积相加，即可得到在一定法向压力下整个原始粗糙表面的真实接触面积。

1.2　小尺度部分

在大尺度模型中，每个接触面积单元被认为是完全接触的光滑平面，当考虑短波长粗糙的影响时，上一节得到面积单元将不再可以视为完全接触。对于某一面积单元，其真实接触面积是由施加于其上面的法向载荷与其小尺度几何形貌决定的。而其中法向载荷已经通过上一步得到。由于粗糙表面被假设为均匀的和各向同性的，因此可以进一步假设每个面积单元上的形貌具有相同的特征，且可以用高频 PSD 函数唯一的表征。借助 PSD 函数，本研究将每个接触面积单元上的微形貌与分形粗糙表面模型建立联系，并进一步得到它的力学响应，即对应法向载荷下的真实接触面积。

正如式(1)所描述的，频率在 $q_r \sim q_s$ 的范围内的 PSD 函数呈对数线性减小的趋势，对应尺度的粗糙表面具有分形的特征。将 PSD 函数在 $q_r \sim q_s$ 的范围内在对数轴下均匀离散成 m 部分，每个部分的频率是前一个的 k 倍。对于第 i 个频率段的下限 q_i，有

$$q_i = k^i q_r \quad 0 \leqslant i \leqslant m-1 \tag{2}$$

而 k 可以由下式得到

$$k = \sqrt[m]{\frac{q_s}{q_r}} \tag{3}$$

假设每一个面积单元(大尺度部分给定)的形貌可以描述为 m 层不同波长的粗糙峰的叠加。鉴于此，采用 m 阶二维 Cantor 集建模表征在每个面积单元上其的几何形貌。

如图 2 所示，上述频率段所对应的粗糙峰被转化成了二维 Cantor 集对应的某一层矩形齿。矩形齿块体的边长 l_i 是对应的粗糙转化成的方波的半波长，高度 h_i 是频率在 $q_i \sim q_s$ 范围内的方波按一定方式叠加的等效幅值之和的 2 倍，分别可以表示为

$$l_i = \frac{\sqrt{2}\pi}{q_i},$$
$$h_i = 2\sqrt{\theta_c \int_{q_i}^{q_s} C(q) q \mathrm{d}q} \tag{4}$$

其中，θ_c 为等效转化系数，是一个与表面参数有关的量。

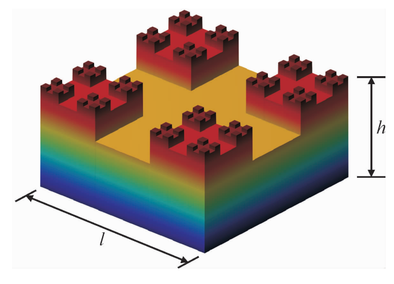


图 2　二维 Cantor 集

Fig. 2　Two-dimensional Cantor set

为了确定 θ_c 的值，首先要确定给定频率段对应的方波组合成 Cantor 集的叠加形式，而这些方波的幅值与 PSD 函数之间通过一定方式进行关联，从而最终决定了 h_i 的值。假设频率为 q_i 的方波幅值为 B_i，为了将幅值为 B_{i+1} 的方波以保持 q_i 的方波的峰－峰值不变的条件叠加在其上，则需额外叠加一个频率与 q_i 相同，相位差为 π 且幅值为 B_{i+1} 的方波。假设下一层的方波总是叠加在上一层的波峰范围内，波谷处的叠加被忽略。按这样的方式逐层叠加不同频率的方波形成 Cantor 集，则 h_i 与实际所含的方波幅值 b_i 可表示为

$$h_i = 2B_i,$$

$$b_i = B_i - B_{i+1} = \frac{h_i - h_{i+1}}{2} = \frac{\Delta h_i}{2} \tag{5}$$

其中，Δh_i 是相邻两层 Cantor 集块体之间的间距。

为了让 Cantor 集结构与原始的小尺度分形结构尽最大程度的相同，考虑它们的 PSD 之间的关联。由于 Cantor 集模型中仅包含了形如 $q_x = q_y = \sqrt{2}/2q$ 的方波，其 PSD 函数不再是各向同性的，因此令其在沿 $q_x = q_y$ 方向上与原来的分形 PSD 函数相等。忽略相位的影响，分解方波 $b(q)$ 为一系列的正弦波并在 q 方向的坐标轴上叠加，得到在频率为 q 处的正弦波幅值为

$$a(q) = \frac{16\eta}{\pi^2} b(q) \tag{6}$$

其中，

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{H-2} \tag{7}$$

则 Cantor 集在 q 处对应的 PSD 函数值为

$$C_{\mathrm{set}}(q) = \frac{\left(\frac{a(q)}{4}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\Delta q\right)^2} = \frac{8\eta^2}{\pi^4}\left(\frac{h(q) - h(q+\Delta q)}{\Delta q}\right)^2 \tag{8}$$

当 Δq 足够小时令 $C_{\mathrm{set}}(q) = C(q)$，将式(4)～(6)代入到式(8)中，最终得到 θ_c 的值，即

$$\theta_c = \frac{\pi^4}{16H\eta^2} \tag{9}$$

由此，Cantor 集的几何形貌完全由表面的小尺度分形特征确定下来。

当法向载荷施加在上述得到的 Cantor 集模型上时，假设位于上层的块体先发生接触变形，并且直到位于某一层之上的所有层被完全压平，这一层才开始接触并发生法向的变形。随着法向载荷的增加，Cantor 集被逐层压平，接触面积不断增加，直到最下面的一层进入接触，这时这个接触面积单元被认为是完全接触的。块体在变形过程中的体积守恒被忽略了。每个特定的法向载荷值对应着 Cantor 集某一被压平的层，也即对应着特定的接触面积。

第 i 层 Cantor 集对应的面积可以表示为

$$A_i = \left(\frac{k+1}{2k}\right)^{2i} A_0, \quad 0 \leqslant i \leqslant m-1 \tag{10}$$

其中，A_0 为最下面那一层的面积，与对应接触单元的面积相等，为

$$A_0 = \frac{2\pi^2}{q_r^2} \tag{11}$$

为了得到每层的临界承载压力，一个面积等效的圆柱刚性平压头法向压入弹性半无限基体上的解析解被使用[21]。对于半径为 r_i 的圆柱压头压入基体深度为 Δh_i 的情况，平均接触压力 Δp_i 表示为

$$\Delta p_i = 2E'\Delta h_i/(\pi r_i),$$

$$r_i = \frac{l_i}{\sqrt{\pi}} \tag{12}$$

其中：$E' = E/(1-\nu^2)$ 为等效杨氏模量；E 为材料的弹性模量；ν 为材料的泊松比。

考虑到实际粗糙表面 PSD 分析得到的频率是连续的，离散数 m 应趋近于无穷大。因此，每层的接触面积 A 和对应的临界压力 $\mathrm{d}p$ 可表示为

$$A = \frac{2\pi^2}{q_r q},$$

$$\mathrm{d}p = \frac{2E'q}{\sqrt{2\pi^3}}\mathrm{d}h \tag{13}$$

则压平 Cantor 集模型中具有接触面积 A 对应的层的法向临界总压力为

$$F_{\mathrm{cr}} = \int A\,\mathrm{d}p = 4E'\sqrt{\frac{\pi P_0 \theta_c}{H}} q_r^H \sqrt{(2\pi^2)^{-2H} q_r^{2H} A^{2H} - q_s^{-2H}} \tag{14}$$

结合在第1.1节中得到的每个接触单元上法向载荷,每个接触单元的真实接触面积均可以相应地计算得到。将每个接触单元的真实接触面积相加,即可得到原始粗糙表面的总体真实接触面积。

2　有限元模拟验证

为了验证上述模型的准确性,本研究利用有限元模拟计算了具有不同参数特性的粗糙表面的法向接触。利用ABAQUS,构建了如图3所示的表面粗糙的弹性基体模型。基体的横向尺寸和表面的网格数量与粗糙表面的尺寸与采样点数一致。粗糙表面的数据用修改节点坐标的方式加在基体的上表面,并在厚度方向线性插值。靠近表面的区域由非协调六面体单元(C3D8I)组成。基体侧面边界的节点沿边界面法线方向的自由度被固定。法向的位移载荷被施加在基体上方一定距离的刚性平面上。接触界面的切向行为设为无摩擦条件。弹性模量和泊松比分别为 $E = 100$ GPa, $\nu = 0.3$。

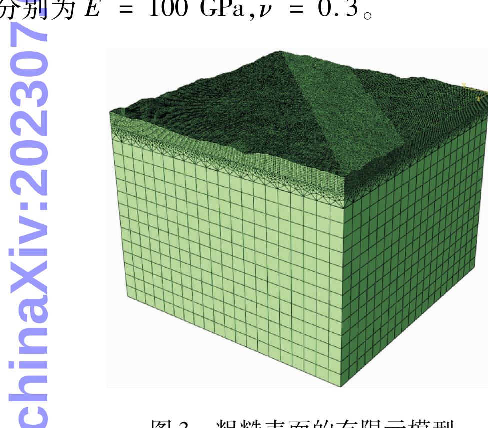
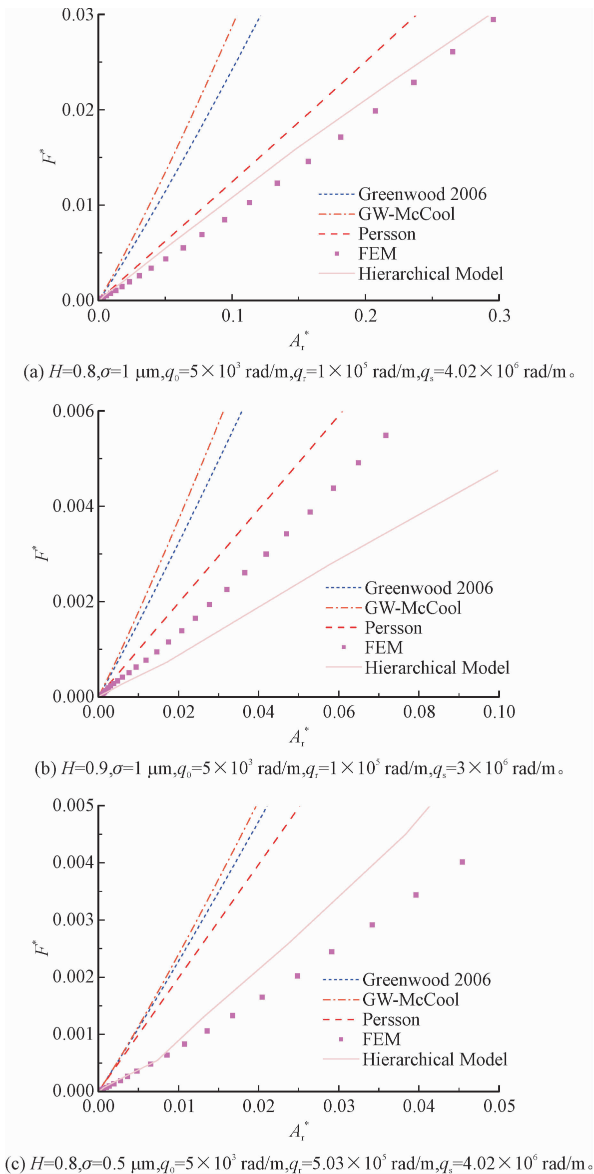


图3　粗糙表面的有限元模型

Fig. 3　FEM model of the rough surface

在每组模拟中,计算2个粗糙表面在相同条件下的接触响应,其中第1个表面是PSD函数形如式(1)的原始表面,第2个表面是用1.1节的方法处理得到的截断表面。其中,原始表面的规模是256×256的采样点。在有限元中,为了平滑地过渡表面高度,表面的六面体线性插值网格为10层,整体地网格总数接近 10^6,而经过截断处理后的网格表面为32×32或更小(由截断频率而定),截断表面的网格总数不足 10^4,计算规模减小了 10^2 倍以上。将第2个表面上每个接触节点的法向力按步提取,然后代入到式(14)中计算对应面积单元的真实接触面积并求和。所得到的力-面积响应曲线与原始表面直接用有限元计算得到的曲线进行比较,部分结果如图4所示。



(a) H=0.8, σ=1 μm, q_0=5×10³ rad/m, q_r=1×10⁵ rad/m, q_s=4.02×10⁶ rad/m。

(b) H=0.9, σ=1 μm, q_0=5×10³ rad/m, q_r=1×10⁵ rad/m, q_s=3×10⁶ rad/m。

(c) H=0.8, σ=0.5 μm, q_0=5×10³ rad/m, q_r=5.03×10⁵ rad/m, q_s=4.02×10⁶ rad/m。

图4　有限元计算的原始表面和截断表面模型修正后的力-面积曲线

Fig. 4　The Force-Area curves of the initial surface and the cut-off surface calculated by FEM

结果表明,对于不同参数的粗糙表面,层级模型预测的力-面积曲线与原始粗糙表面的响应结果相较于其他理论模型更加接近。这说明本研究提出的模型在预测多尺度粗糙表面的法向接触响应中是可行的。在实际应用中,针对多尺度粗糙的各向同性表面,只需提取一定精度的信息得到较大尺度的轮廓,以及小尺度的分形特征,利用本研究模型即可在较小的计算成本下获得其法向接触的响应。该模型可以通过改变材料属性扩展到弹塑性情况,这一部分将在之后的工作中进行分析。

3 结　论

本研究将分形理论引入到多尺度粗糙表面的描述中，并根据低频和高频特性将粗糙形貌划分为 2 部分，提出了弹性接触的层级模型。验证工作表明，该模型适用于描述多尺度粗糙度表面的法向接触响应。用本研究模型对实际的多尺度粗糙表面进行建模是可行的，并且效率较高。该模型可用于进一步研究多尺度粗糙表面之间的弹塑性接触和摩擦。

参考文献：

[1] BOWDEN F P. The friction and lubrication of solids[J]. American journal of physics, 1951, 19(7): 428-429.

[2] DIETERICH J H, KILGORE B D. Direct observation of frictional contacts: New insights for state-dependent properties[J]. Pure and applied geophysics, 1994, 143(1): 283-302.

[3] DIETERICH J H, KILGORE B D. Imaging surface contacts: Power law contact distributions and contact stresses in quartz, calcite, glass and acrylic plastic[J]. Tectonophysics, 1996, 256(1/2/3/4): 219-239.

[4] BERTHOUD P, BAUMBERGER T. Shear stiffness of a solid-solid multicontact interface[J]. Proceedings of the royal society of london. series A: Mathematical, physical and engineering sciences, 1998, 454(1974): 1615-1634.

[5] MANDELBROT B B, PASSOJA D E, PAULLAY A J. Fractal character of fracture surfaces of metals[J]. Nature, 1984, 308(5961): 721-722.

[6] ARCHARD J F. Elastic deformation and the laws of friction[J]. Proceedings of the Royal Society of London, 1957, 243: 190-205.

[7] GREENWOOD J A, WILLIAMSON J B P, BOWDEN F P. Contact of nominally flat surfaces[J]. Mathematical and physical sciences, 1966, 295(1442): 300-319.

[8] NAYAK P R. Random process model of rough surfaces in plastic contact[J]. Wear, 1973, 26(3): 305-333.

[9] BUSH A W, GIBSON R D, THOMAS T R. The elastic contact of a rough surface[J]. Wear, 1975, 35(1): 87-111.

[10] MAJUMDAR A, BHUSHAN B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces[J]. Journal of tribology, 1991, 113(1): 1-11.

[11] YAN W, KOMVOPOULOS K. Contact analysis of elastic-plastic fractal surfaces[J]. Journal of applied physics, 1998, 84(7): 3617-3624.

[12] 金守峰，宿月文，郭彩霞. 三维分形粗糙表面的修正接触模型[J]. 中国机械工程，2012，23(19)：2316-2319.
JIN Shoufeng, SU Yuewen, GUO Caixia. Revised contact model among three dimensional fractal rough surfaces[J]. China mechanical engineering, 2012, 23(19): 2316-2319(in Chinese).

[13] 赵永武，吕彦明，蒋建忠. 新的粗糙表面弹塑性接触模型[J]. 机械工程学报，2007，43(3)：95-101.
ZHAO Yongwu, LÜ Yanming, JIANG Jianzhong. New elastic-plastic model for the contact of rough surfaces[J]. Chinese journal of mechanical engineering, 2007, 43(3): 95-101(in Chinese).

[14] 甘立，原园，刘凯，等. 分形粗糙表面弹塑性接触力学模型[J]. 应用力学学报，2016，33(5)：738-743.
GAN Li, YUAN Yuan, LIU Kai, et al. Mechanical model of elastic-plastic contact between fractal rough surfaces[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2016, 33(5): 738-743 (in Chinese).

[15] HYUN S, ROBBINS M O. Elastic contact between rough surfaces: Effect of roughness at large and small wavelengths[J]. Tribology international, 2007, 40(10/12): 1413-1422.

[16] BENZ M, ROSENBERG K J, KRAMER E J, et al. The deformation and adhesion of randomly rough and patterned surfaces[J]. The journal of physical chemistry B, 2006, 110(24): 11884-11893.

[17] HYUN S, PEI L, MOLINARI J F, et al. Finite-element analysis of contact between elastic self-affine surfaces[J]. Physical review E, 2004, 70(2): 026117.

[18] PEI L, HYUN S, MOLINARI J F, et al. Finite element modeling of elasto-plastic contact between rough surfaces[J]. Journal of the mechanics and physics of solids, 2005, 53(11): 2385-2409.

[19] AN B W, WANG X Z, XU Y, et al. Deterministic elastic-plastic modelling of rough surface contact including spectral interpolation and comparison to theoretical models[J]. Tribology international, 2019, 135: 246-258.

[20] WANG F S, BLOCK J M, CHEN W W, et al. A multilevel model for elastic-plastic contact between a sphere and a flat rough surface[J]. Journal of tribology, 2009, 131(2): 021409.

[21] JOHNSON K L. Contact mechanics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

（编辑　史淑英）